

INTRODUÇÃO À
ÁLGEBRA
LINEAR

EDIÇÃO REVISTA

ANA PAULA SANTANA
JOÃO FILIPE QUEIRÓ

NÃO-FICÇÃO · MATEMÁTICA

*A Maria Emília Miranda,
nossa primeira professora de Álgebra Linear*

Prefácio

*I would have a man knocked in the head
that should write anything in Mathematics
that had been written of before.*

Edward Davenant (séc. XVII)

Porquê mais um livro de Álgebra Linear? Em que se distingue o presente livro de outros que tratam esta matéria básica para a Matemática superior?

Desde a edição do clássico *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, de F. R. Dias Agudo, há 50 anos, foram publicados em Portugal vários livros nesta área. O primeiro a reflectir as mudanças no ensino da Álgebra Linear ocorridas nos E.U.A., corporizadas nomeadamente em *Linear Algebra and Its Applications*, de G. Strang, foi *Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada*, de L. Magalhães, em 1989. Nestes dois livros, a ordem clássica na apresentação das matérias é alterada, passando para o início os aspectos mais computacionais, incluindo a linguagem básica das matrizes e os sistemas de equações lineares. Essa abordagem só depois trata a parte mais abstracta e “geométrica”, abrangendo a teoria dos espaços vectoriais e transformações lineares.

Estes dois aspectos da Álgebra Linear podem em alguma medida ser estudados independentemente a nível introdutório, mas as relações entre eles são profundas: só com recurso ao cálculo matricial é possível tornar efectivos muitos dos resultados e construções da teoria dos espaços e transformações, e sem os conceitos desta última a teoria das matrizes fica em parte reduzida a uma sequência de operações e algoritmos sem elegância nem consistência.

No entanto, em muitos cursos de Engenharia, Economia e Ciências apenas se dedica um semestre à Álgebra Linear, o que levanta um problema de selecção de matérias e de escolha na ordem da exposição.

A nossa opção foi também abordar inicialmente a parte mais concreta e computacional da Álgebra Linear. Em seguida, começamos o estudo da “geometria linear”, mas ainda apenas no contexto particular de \mathbb{R}^n . O mesmo acontece no capítulo seguinte, dedicado à “geometria métrica” de \mathbb{R}^n . Em ambos os capítulos as demonstrações dos teoremas são levadas a cabo tanto quanto possível usando apenas a estrutura linear de \mathbb{R}^n , evitando utilizar coordenadas.

Esta abordagem tem como objectivo dar o salto da abstracção em dois tempos, deixando para mais tarde o estudo dos espaços gerais, que surgirá então com maior naturalidade e mais sólida motivação. Trata-se portanto de uma opção pedagógica, e não científica.

Antes dos espaços vectoriais estudamos a geometria analítica do 1.º grau. Logo a seguir, abordamos o importante tema dos vectores próprios e valores próprios de matrizes quadradas, referindo algumas aplicações interessantes, incluindo a clássica geometria analítica do 2.º grau, mas também outras mais modernas, como a decomposição dos valores singulares, a compressão de imagens e o funcionamento do Google. Faz-se o estudo completo da forma normal de Jordan, incluindo a sua unicidade.

Os capítulos finais são dedicados à Álgebra Linear abstracta, estudando-se e classificando-se os espaços vectoriais gerais sobre corpos arbitrários (incluindo os espaços de dimensão infinita), as transformações lineares entre eles, e os espaços com produto interno.

As matérias estudadas num curso introdutório de Álgebra Linear são razoavelmente *standard*. Uma característica deste livro é a apresentação sistemática dessas matérias, mas de forma modular, de modo a ser possível conceber vários cursos com ele.

Em particular, uma disciplina semestral de Álgebra Linear que não tenha como objectivo principal o estudo dos espaços vectoriais pode ser construída a partir dos capítulos 1 a 7. Pensando nesse cenário, incluímos nos capítulos 4 e 5 uma breve referência aos espaços abstractos e aos produtos internos abstractos. Uma disciplina semestral em que se deseje contemplar esses espaços de forma profunda e completa pode tratar os capítulos 1 a 3 e depois passar directamente ao capítulo 8, com referências ocasionais a temas tratados nos capítulos anteriores.

São possíveis outras configurações e outros usos do texto, inclusive para disciplinas mais avançadas ou como apoio a disciplinas de Análise Numérica ou Álgebra Linear Numérica.

O livro caracteriza-se também por todos os resultados fundamentais serem demonstrados (exceptuando-se três, o Teorema Fundamental da Álgebra, o Lema de Zorn e o Teorema de Schröder-Bernstein, que não são parte da Álgebra Linear). Foi esta intenção, juntamente com as matérias escolhidas e a sequência adoptada para a sua exposição, que esteve na origem da nossa decisão de escrever o livro.

As várias secções terminam com exercícios, mas optámos por quase não incluir exercícios numéricos. Há no texto muitos exemplos práticos ilustrativos completamente tratados, mas os exercícios orientam-se em geral para o estudo de factos adicionais, por vezes necessários mais tarde no próprio texto, outras vezes abrindo perspectivas para desenvolvimentos e explorações.

Criámos um *site* para o livro

<http://sites.google.com/site/livroial>

onde colocaremos fichas com exercícios numéricos, soluções ou sugestões relativas aos exercícios do livro, bem como complementos e observações sobre o texto.

Dada a importância central da linguagem Matlab na Matemática Aplicada hoje em dia, apresentamos os comandos principais dessa linguagem num apêndice final.

O único pré-requisito para o início da leitura do livro é a linguagem básica sobre conjuntos e funções.

Este livro esteve *online*, em sucessivas versões, à disposição de todos, publicamente, desde 2000. A versão de 2003 foi a mais utilizada, por milhares de estudantes e muitos colegas de Coimbra, bem como por estudantes e colegas de outras universidades.

A actual edição teve o apoio do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra / FCT, a cuja Direcção agradecemos.

Estamos gratos aos colegas e estudantes que nos fizeram chegar críticas e sugestões. Destacamos Luís Trabucho e João Luís Soares, pela leitura pormenorizada. Agradecemos também os comentários de António Leal Duarte, Helena Albuquerque, Jorge Buescu, Jorge Neves, José Perdigão Dias da Silva, Luís Nunes Vicente, Margarida Mendes Lopes, Maria Manuel Clementino, Olga Azenhas e Paulo Oliveira. A Armando Machado e Eduardo Marques de Sá devemos duas demonstrações assinaladas no texto. Cristina Caldeira cedeu-nos as ilustrações das cônicas e das quádricas. Jorge Picado e Carlos Leal ajudaram-nos com problemas abstrusos de L^AT_EX.

Os erros que restam são só nossos, e ficaremos gratos aos leitores que no-los assinalarem.

Coimbra, Abril de 2010

Ana Paula Santana

João Filipe Queiró

Nota à edição revista

Nesta edição procedemos a alterações e correcções localizadas do texto de 2010. Estamos gratos a Cristina Caldeira por várias observações e por melhorias em algumas figuras. Agradecemos ainda a Dulce Inês Silva, Isabel Ferreirim, João Luís Soares, José Miguel Urbano, Maicon Karling, Manuela Sobral, Matheus Rigo e Milene Santos a comunicação de gralhas que encontraram no texto.

Coimbra, Dezembro de 2021

APS

JFQ

Nota à edição de 2026

Nesta edição procedemos a alterações e correcções localizadas da edição de 2022. Agradecemos a João Luís Soares, Pedro F. Carvalho e Filipe Martins a comunicação de gralhas que encontraram no texto.

Coimbra, Fevereiro de 2026

APS

JFQ

Índice

0	Os números complexos	1
1	Matrizes	9
1.1	Generalidades	9
1.2	Operações com matrizes	12
1.3	Inversa de uma matriz quadrada	21
1.4	Transposição de matrizes	24
1.5	Matrizes elementares	30
2	Sistemas de equações lineares	35
2.1	Generalidades	36
2.2	Algoritmo de eliminação de Gauss	38
2.3	Algoritmo de Gauss-Jordan para inversão de matrizes	60
3	Determinantes	67
3.1	Definição e primeiras propriedades	67
3.2	Permutações	72
3.3	Existência e unicidade do determinante	76
3.4	Outras propriedades dos determinantes	83
3.5	Teorema de Laplace e regra de Cramer	88
4	O espaço \mathbb{R}^n, subespaços, dimensão	95
4.1	Subespaços	96
4.2	Dependência e independência linear	105
4.3	Base e dimensão	110
4.4	Mudança de base	118
4.5	Característica e nulidade de uma matriz	121
4.6	Soma e soma directa de subespaços	127
4.7	Transformações lineares em \mathbb{R}^n	132
4.8	Nota sobre espaços vectoriais abstractos	139

5	Ângulos e distâncias em \mathbb{R}^n	141
5.1	Geometria métrica em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3	141
5.2	Produto interno em \mathbb{R}^n	145
5.3	Projectão ortogonal sobre um subespaço	152
5.4	Mínimos quadrados	162
5.5	Complemento ortogonal de um subespaço	171
5.6	Medidas de paralelepípedos	173
5.7	Produto externo em \mathbb{R}^3	175
5.8	Nota sobre produtos internos abstractos	182
6	Planos em \mathbb{R}^n	185
6.1	Descrições usando a estrutura vectorial de \mathbb{R}^n	185
6.2	Descrições usando o produto interno em \mathbb{R}^n	191
7	Valores próprios e vectores próprios de matrizes	201
7.1	Conceitos básicos	201
7.2	Matrizes diagonalizáveis	207
7.3	Semelhança de matrizes e forma normal de Jordan	213
7.4	Um algoritmo para o cálculo de vectores próprios	230
7.5	Desenvolvimentos e aplicações	233
7.5.1	Matrizes simétricas reais	233
7.5.2	Curvas e superfícies do 2. ^o grau	239
7.5.3	Decomposição dos valores singulares	253
7.5.4	Norma de uma matriz e compressão de imagens	262
7.5.5	Número de condição de uma matriz	274
7.5.6	Sistemas dinâmicos lineares discretos	277
7.5.7	Sistemas lineares de equações diferenciais	287
7.5.8	Análise de componentes principais	290
7.5.9	Matrizes positivas e o funcionamento do Google	296
8	Espaços vectoriais	307
8.1	Corpos	307
8.2	Espaços vectoriais	313
8.3	Subespaços	320
8.4	Conjuntos geradores e independência linear	323
8.5	Base e dimensão	335
8.6	Soma e soma directa de subespaços	350
8.7	Espaço vectorial quociente	359

9	Transformações lineares	367
9.1	Generalidades	367
9.2	Núcleo e imagem	374
9.3	Isomorfismos	380
9.4	Espaço dual	391
9.5	Representação matricial de transformações lineares . .	395
9.6	Valores próprios e vectores próprios	410
9.7	Existência da forma normal de Jordan	416
10	Espaços vectoriais com produto interno	421
10.1	Generalidades	421
10.2	Classificação dos produtos internos em \mathbb{R}^n	427
10.3	Complemento ortogonal	429
11	Apêndices	439
11.1	História dos números complexos	439
11.2	Permutações	443
11.3	Teorema de Laplace	447
11.4	Teorema de Perron	453
11.5	Cardinais	456
11.6	Matlab	458
	Bibliografia	467
	Índice de símbolos	469
	Índice alfabético	471

Capítulo 0

Os números complexos

Esta secção é uma breve introdução aos conjuntos de números que serão mais utilizados no texto. Destina-se principalmente ao leitor pouco familiarizado com os números complexos.

Os conjuntos de números mais conhecidos e habituais são os seguintes: o conjunto dos **números naturais**,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

o conjunto dos **números inteiros**,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

o conjunto dos **números racionais**,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

e o conjunto dos **números reais**, para o qual usaremos o símbolo \mathbb{R} .

Tem-se a seguinte cadeia de inclusões:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Exemplos de números reais que não são racionais são $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e e π . A melhor maneira de visualizar o conjunto \mathbb{R} é pensar nos pontos de uma recta, o **eixo real**. Marcando no eixo dois pontos para representar os números 0 e 1, obtém-se uma correspondência perfeita entre \mathbb{R} e o conjunto dos pontos do eixo:



Supor-se-ão conhecidas as propriedades básicas destes números.

No século XVI, a propósito da descoberta da fórmula resolvente das equações do 3.º grau, “descobriu-se” um novo conjunto de números contendo \mathbb{R} . Essa história é recordada em apêndice.

O novo conjunto de números é o conjunto dos **números complexos**,

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\},$$

onde i satisfaz $i^2 = -1$. As operações com números complexos realizam-se tratando-os como números como os outros e usando as propriedades habituais das operações, bem como a igualdade $i^2 = -1$. Assim, por exemplo,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Estas operações gozam das mesmas propriedades algébricas que as correspondentes no conjunto dos reais: comutatividade, associatividade, distributividade da multiplicação relativamente à adição.¹ Os números complexos $0 = 0 + 0i$ e $1 = 1 + 0i$ são elementos neutros para, respectivamente, a adição e a multiplicação. O inverso do número complexo $a + bi \neq 0$ é

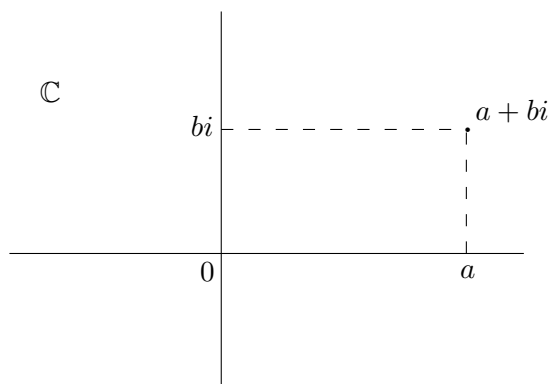
$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i.$$

Note-se que todos os números reais são também números complexos (são aqueles em que $b = 0$), pelo que a cadeia de inclusões acima referida pode ser completada:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

A melhor maneira de visualizar o conjunto \mathbb{C} é pensar nos pontos de um plano, o **plano complexo**. Traçando no plano um sistema de dois eixos perpendiculares, e identificando o número complexo $a + bi$ com o ponto de coordenadas (a, b) , obtém-se uma correspondência entre \mathbb{C} e o conjunto dos pontos do plano.

¹ Uma diferença básica entre \mathbb{R} e \mathbb{C} é que no conjunto dos números complexos não existe uma relação de ordem $<$ compatível com as operações, isto é, satisfazendo, para quaisquer $z_1, z_2, w \in \mathbb{C}$, as implicações $z_1 < z_2 \wedge w > 0 \implies z_1 w < z_2 w$ e $z_1 < z_2 \implies z_1 + w < z_2 + w$.



Se pensarmos na fórmula resolvente para equações do 2.º grau, vemos que, com a introdução dos números complexos, qualquer equação do 2.º grau com coeficientes reais tem solução em \mathbb{C} : o aparecimento de raízes quadradas de números negativos deixa de ser problema. Por exemplo, a equação $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ tem as soluções $1 + 2i$ e $1 - 2i$.

Mas de facto pode dizer-se muito mais:

Teorema 0.1 *Qualquer equação de qualquer grau (não nulo), com coeficientes reais ou mesmo complexos, tem solução em \mathbb{C} .*

Este é o chamado **Teorema Fundamental da Álgebra**, demonstrado pela primeira vez de forma completa por Gauss em 1799.²

Seja $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ um polinómio de grau n com coeficientes reais ou complexos. Se um número α (real ou complexo) for raiz de $p(\lambda)$, isto é, solução da equação $p(\lambda) = 0$, então é bem conhecido que $p(\lambda)$ é divisível por $\lambda - \alpha$:

$$p(\lambda) = (\lambda - \alpha)q(\lambda),$$

onde $q(\lambda) = a_n\lambda^{n-1} + \dots$ é um polinómio de grau $n - 1$.

Desta observação e do Teorema Fundamental da Álgebra tira-se uma importante conclusão: um polinómio com coeficientes reais ou complexos pode sempre escrever-se como produto de factores de grau 1:

² Para provar este teorema são necessários conhecimentos de Análise que estão para além do 1.º ano da universidade. Note-se que o teorema apenas afirma a *existência* de soluções. A determinação delas para cada equação é um problema diferente.

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = a_n (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \cdots (\lambda - \alpha_n),$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são as raízes (reais ou complexas) do polinómio.

Nesta factorização de um polinómio (que é única a menos da ordem dos factores), uma raiz pode aparecer mais de uma vez. Se aparecer apenas uma vez, diz-se uma raiz **simples** do polinómio. Se aparecer exactamente duas vezes, diz-se uma raiz **dupla** do polinómio. E assim sucessivamente. Se aparecer exactamente k vezes, diz-se que é uma raiz de **multiplicidade** k do polinómio.

O Teorema Fundamental da Álgebra mostra que o conjunto \mathbb{C} é muito rico do ponto de vista algébrico. Vamos ilustrar essa riqueza mostrando explicitamente que, dado $n \in \mathbb{N}$, qualquer número complexo não nulo tem n raízes de índice n em \mathbb{C} . Claro que isto é consequência imediata do Teorema Fundamental da Álgebra (as n raízes de índice n de um número complexo z são as raízes do polinómio $\lambda^n - z$), mas o que vamos ver é que é muito simples determinar essas raízes.

Antes disso, introduzimos mais alguma terminologia sobre números complexos.

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Chamamos a a **parte real** de z e escrevemos $a = \operatorname{Re} z$. Chamamos a b **parte imaginária** de z e escrevemos $b = \operatorname{Im} z$. Se $a = 0$, dizemos que z é **imaginário puro**. O **conjugado** de z é $\bar{z} = a - bi$. O **módulo** de z é o número real não-negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. (A função módulo em \mathbb{C} estende a função módulo conhecida em \mathbb{R} .) Geometricamente, $|z|$ é a distância do ponto z do plano complexo à origem (isto é, ao ponto 0). Mais geralmente, $|z - w|$ é a distância entre os pontos z e w .

Seja z um número complexo não nulo, identificado com um ponto do plano. À medida do ângulo que a semi-recta que vai de 0 para z faz com a parte positiva do eixo real chamamos **argumento** de z (notação: $\arg z$). Cada número complexo $z \neq 0$ tem uma infinidade de argumentos, diferindo uns dos outros por múltiplos inteiros de 2π .